

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/228795368>

Presentando una Metodología para la Visualización del Desarrollo de un Hipercubo 4D

Article · July 2003

CITATIONS

0

READS

285

2 authors:



Antonio Aguilera

Universidad de las Americas Puebla

31 PUBLICATIONS 206 CITATIONS

SEE PROFILE



Ricardo Pérez-Aguila

Intelligent Solutions for Multimedia Analysis

34 PUBLICATIONS 144 CITATIONS

SEE PROFILE

Presentando una Metodología para la Visualización del Desenvolvimiento¹ de un Hipercubo 4D

Antonio Aguilera
aguilera@mail.udlap.mx

Ricardo Pérez-Aguila
sp104378@mail.udlap.mx

Centro de Investigación en Tecnologías de Información y Automatización (CENTIA)
Universidad de las Américas – Puebla (UDLAP)
Cholula, Puebla 72820, México

RESUMEN

Este artículo presenta un método para desenvolver al hipercubo 4D y formar la cruz tridimensional que corresponde al hiperaplanamiento de su frontera. También se presenta una metodología para visualizar tal procedimiento. Entre las transformaciones a considerar se incluyen rotaciones alrededor de planos (propias del espacio 4D). Finalmente se describirán algunas generalizaciones referentes al desenvolver de un hipercubo n-dimensional.

Palabras Claves: Modelado 4D, Animación 4D, Geometría Computacional, Interrogaciones y Razonamiento Geométrico.

1. INTRODUCCIÓN

Coxeter [5], Rucker [12], Kaku [9], Robbin [10] y Banchoff [2] inician sus introducciones al estudio del espacio 4D aplicando tres métodos de visualización sobre el hipercubo: observación de sus sombras (proyección), sus intersecciones con el espacio 3D y a través de sus "unravelings".

Examinar las sombras de un politopo consiste en que si es posible hacer dibujos de sólidos 3D cuando éstos son proyectados sobre un plano, entonces es posible hacer dibujos o modelos tridimensionales de los politopos 4D cuando éstos son proyectados sobre un hiperplano [5].

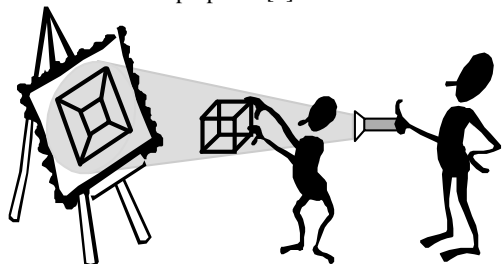


Figura 1. Proyección de un cubo sobre un plano.

En el primer caso, y siguiendo la analogía presentada en "Flatland" [1] si un ser 3D quiere mostrar un cubo a un ser 2D (un "flatlander"), entonces el primero deberá proyectar la sombra del cuerpo sobre el plano en el que el flatlander habita. En este caso, la figura proyectada podría ser, por ejemplo, un cuadrado dentro de otro cuadrado (figura 1) llamada proyección central.

Para el caso en que un ser 4D quisiera mostrarnos un hipercubo, él debe proyectar la sombra de éste sobre el espacio 3D en que vivimos. El cuerpo proyectado podría ser un cubo dentro de otro cubo [9] (figura 2) también llamada proyección central. Sabemos que un cubo proyectado sobre un plano es sólo una representación aproximada. Análogamente, el hipercubo proyectado sobre el espacio 3D es también una representación aproximada del real.

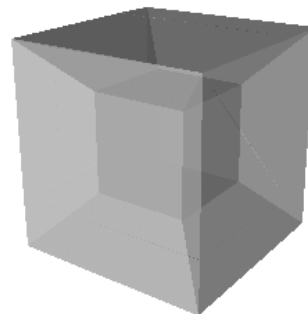


Figura 2. Proyección de un hipercubo en el espacio 3D.

El método de los "unravelings" consiste en que si un cubo puede ser desenvuelto en una cruz bidimensional compuesta por las seis caras que forman su frontera (figura 3) entonces, y en forma análoga, un hipercubo puede ser también desenvuelto en una cruz tridimensional compuesta por los ocho cubos que forman su frontera [9]. C. H. Hinton nombró a esta cruz tridimensional *teseracto* (figura 4).

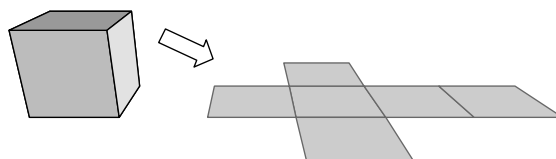


Figura 3. Desenvolvimiento de un cubo.

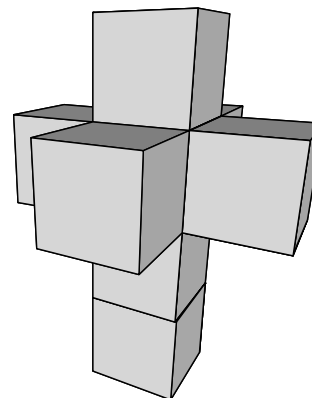


Figura 4. El hipercubo desenvuelto (teseracto).

Un flatlander visualizará la cruz bidimensional pero no tendrá la capacidad para ensamblarla nuevamente en un cubo (aún cuando contase con las instrucciones específicas), debido a

¹ Todas las referencias consultadas utilizan el verbo inglés "unravel" para indicar la acción de hacer coincidir los volúmenes (o las caras) de un hipercubo 4D (o un cubo) con un hiperplano (o un plano). Los términos en castellano utilizados en este artículo para hacer referencia a tal acción serán *desenvolver* o *hiperaplanar* (4D). También el término "unravelings" deberá entenderse como el conjunto de volúmenes (o caras) de un hipercubo (o un cubo) a los que ya fue aplicada la acción de desenvolver.

que es necesaria la traslación de sus caras correspondientes en dirección de la tercera dimensión y la rotación alrededor de un eje (transformaciones físicamente imposibles en el espacio 2D). Pero durante el proceso de ensamblado, el *flatlander* sí podrá visualizar la proyección de las caras del cubo sobre el espacio 2D en que habita.

Por analogía, nosotros podremos visualizar la cruz tridimensional pero no tendremos la capacidad para ensamblarla nuevamente en un hipercubo, debido a que es necesaria la traslación de sus cubos frontera en dirección de la cuarta dimensión y la rotación alrededor de un plano (transformaciones físicamente imposibles en el espacio 3D).

El análisis del hipercubo 4D es también interesante debido a que puede ser realizado usando el recurso de la analogía con el cubo y las visualizaciones descritas antes. Hilbert [7] ha determinado que un hipercubo está formado dieciséis vértices, veinticuatro caras y por ocho cubos (que también son llamados celdas o volúmenes). Coxeter [4] también agrega que cada cara es compartida por dos cubos que no se encuentran en el mismo espacio tridimensional dado que forman un ángulo recto a través de una rotación alrededor del plano de soporte de la cara compartida. Estas propiedades pueden ser claramente visibles a través de la proyección del hipercubo propuesta por Claude Bragdon (figura 5) (véase [11] para un análisis sobre la obtención de esta proyección).

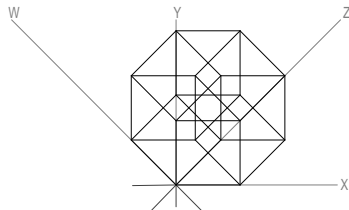


Figura 5. El hipercubo con proyección de Bragdon.

2. PROBLEMA

Kaku [9] y Banchoff [2] describen con detalle el modelo de representación del hipercubo a través de sus "unravellings" y mencionan la incapacidad física de un ser 3D para envolverlo nuevamente debido a las transformaciones que se requieren. Kaku [9] y Banchoff [2] también describen que si presenciáramos el proceso de envolverlo, siete de los ocho cubos que forman la cruz desaparecerían repentinamente debido a que ya se han movido hacia la cuarta dimensión. Sin embargo no proporcionan una metodología que indique las transformaciones y sus parámetros necesarios para ejecutar tal procedimiento. A pesar de dicha incapacidad nuestra, lo que sí podemos es visualizar una proyección de los cubos de la frontera del hipercubo en nuestro espacio 3D durante su desenvolvimiento y ensamblado.

Este artículo presenta un método para desenvolver el hipercubo y formar la cruz tridimensional (teseracto) que corresponde al hiperaplanamiento de su frontera (figura 6). El envolver el hipercubo implicará aplicar el método de manera inversa. Las transformaciones a aplicar incluyen rotaciones alrededor de planos. Dicho proceso podrá ser visualizado a través de un sistema de animación por computadora.

3. METODOLOGÍA PARA DESENVOLVER UN HIPERCUBO

En primer lugar habrán de tomarse las siguientes consideraciones a fin de hacer más fácil el proceso:

- La posición del hipercubo en el espacio 4D.
- Seleccionar un hiperplano (subespacio 3D inmerso en el hiperespacio) hacia el que los volúmenes serán dirigidos.

- Establecer ángulos de giro que garanticen que todos los volúmenes quedarán completamente inmersos en el hiperplano seleccionado.
- Durante su movimiento hacia el hiperplano seleccionado, todos los volúmenes deberán mantener una relación de adyacencia de cara con otro volumen.

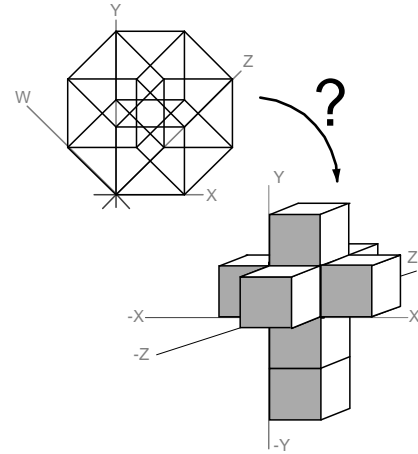


Figura 6. El paso del hipercubo al teseracto.

La posición del hipercubo en el espacio 4D es esencial ya que de ella dependerán los planos de rotación alrededor de los cuales deberán girar los volúmenes para ser posicionados sobre un hiperplano. Por lo tanto se determinará que uno de los vértices del hipercubo coincida con el origen, que seis de sus caras coincidan cada una con alguno de los planos XY, YZ, ZX, XW, YW y ZW y que todas las coordenadas sean positivas (véase en [2] la metodología para obtener las coordenadas de los vértices del hipercubo). Las coordenadas a usar se presentan en la tabla 1 (cada vértice es numerado arbitrariamente).

Vértice	X	Y	Z	W
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	1	1	0	0
4	0	0	1	0
5	1	0	1	0
6	0	1	1	0
7	1	1	1	0
8	0	0	0	1
9	1	0	0	1
10	0	1	0	1
11	1	1	0	1
12	0	0	1	1
13	1	0	1	1
14	0	1	1	1
15	1	1	1	1

Tabla 1. Las coordenadas del hipercubo a desenvolver.

Así como la posición del hipercubo en el espacio 4D tiene relación con los planos de rotación a utilizar, también la tendrá el hiperplano seleccionado sobre el que los volúmenes finalmente serán posicionados. Si se observan las coordenadas de los vértices del hipercubo, se encontrará que ocho de ellas presentan $W=0$, esto se traduce en que uno de los volúmenes del hipercubo (el formado por los vértices 0-1-2-3-4-5-6-7) tiene por hiperplano de soporte a $W=0$. Seleccionar el hiperplano $W=0$ es conveniente ya que uno de los volúmenes ya está "naturalmente inmerso" en el espacio 3D y por lo tanto no requerirá transformaciones posteriores.

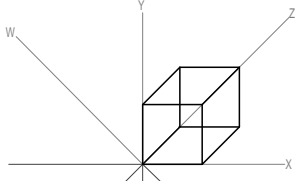
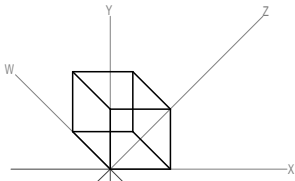
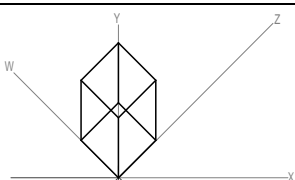
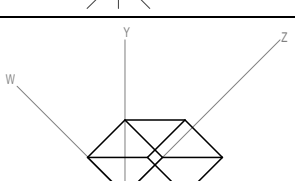
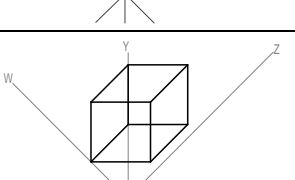
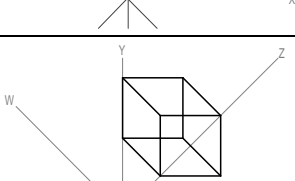
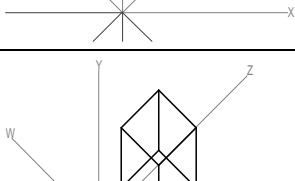
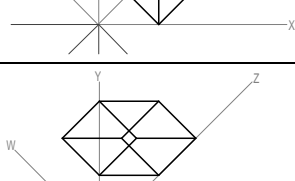
Volumen	Etiqueta y Vértices
	Volumen A (0-1-2-3-4-5-6-7)
	Volumen B (0-1-2-3-8-9-10-11)
	Volumen C (0-2-4-6-8-10-12-14)
	Volumen D (0-1-4-5-8-9-12-13)
	Volumen E (8-9-10-11-12-13-14-15)
	Volumen F (4-5-6-7-12-13-14-15)
	Volumen G (1-3-5-7-9-11-13-15)
	Volumen H (2-3-6-7-10-11-14-15)

Tabla 2. Los ocho volúmenes del hipercubo.

Ahora también es conveniente identificar los volúmenes que forman al hipercubo a través de sus vértices y asignarles una etiqueta para futuras referencias. Hasta ahora ya se tiene un volumen identificado, el formado por los vértices 0-1-2-3-4-5-6-7 y será llamado volumen A. Véase la tabla 2.

Dado que el volumen A ya había sido descrito como "naturalmente inmerso" en el espacio 3D y por consiguiente no requerirá de transformaciones, es por lo tanto el volumen que ocupará la posición central de la "cruz" y será llamado en lo sucesivo el "volumen central".

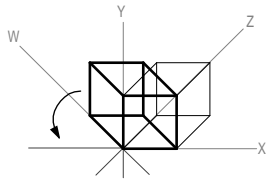
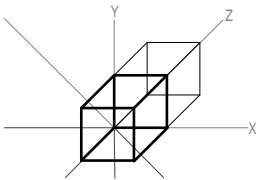
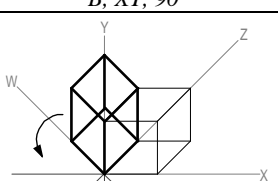
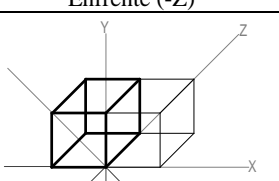
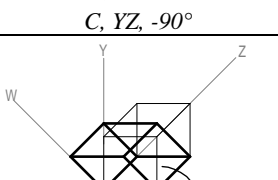
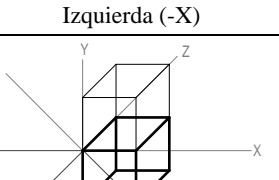
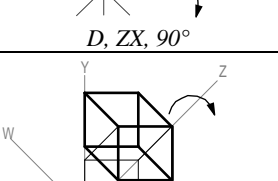
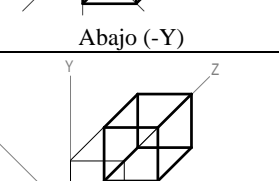
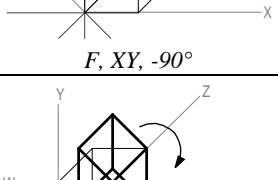
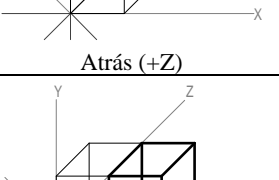
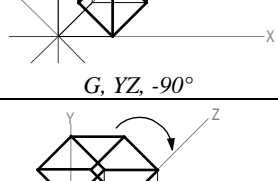
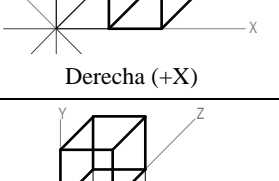
Volumen adyacente (previo a la rotación), plano y ángulo de rotación	Posición en el espacio 3D y en el tesseracto después de la rotación
 <i>B, XY, 90°</i>	 Enfrente (-Z)
 <i>C, YZ, -90°</i>	 Izquierda (-X)
 <i>D, ZX, 90°</i>	 Abajo (-Y)
 <i>F, XY, -90°</i>	 Atrás (+Z)
 <i>G, YZ, -90°</i>	 Derecha (+X)
 <i>H, ZX, -90°</i>	 Arriba (+Y)

Tabla 3. Transformaciones aplicadas a los volúmenes adyacentes.

De los volúmenes restantes, aquellos que mantengan adyacencia de cara con el volumen central podrán ser rotados con facilidad hacia nuestro espacio 3D debido a que su plano de rotación es claramente identificable. Estos volúmenes rotarán alrededor del plano de soporte de la cara que compartan con el volumen central y serán llamados "volúmenes adyacentes", es decir, los volúmenes B, C, D, F, G y H. El volumen restante, E, será llamado "volumen satélite" y se tratará en lo sucesivo.

Todos los volúmenes adyacentes girarán ángulos rectos, así se garantiza que su coordenada W sea igual a cero. Sin embargo, es importante tener en cuenta su dirección de giro ya que de lo contrario los volúmenes podrían una vez rotados coincidir con el volumen central. Los planos de rotación y la dirección para cada volumen adyacente son presentados en la tabla 3 (en las imágenes se incluye también al volumen central sólo para referenciar la posición inicial y final del volumen considerado).

En este punto ya tenemos a 7 de los 8 volúmenes del hiper cubo colocados en su posición final (los volúmenes A, B, C, D, F, G y H). El volumen que ha de presentar la serie de transformaciones más compleja es el E, esto se debe a las siguientes dos particularidades:

- Su hiperplano de soporte es paralelo al del volumen central, por lo tanto no existe ningún tipo de adyacencia con éste (de ahí que no fue designado como volumen adyacente).
- De las posiciones por ocupar en la "cruz" aún falta aquella que corresponde al volumen más alejado del volumen central (en la parte inferior, según la figura 4). El volumen que ocupará esta posición será el E, es por esta razón por la que fue llamado con anterioridad volumen satélite.

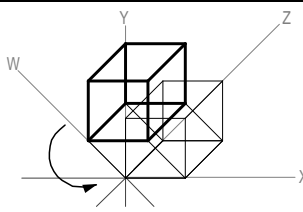
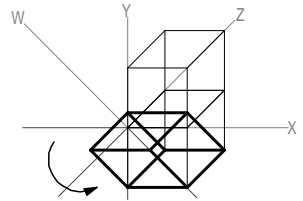
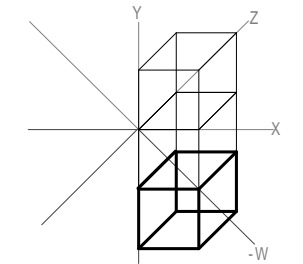
Posición actual	Transformación
	Rotación de los volúmenes D y satélite alrededor del plano ZX (90°).
	Volumen D en su posición final. Rotación del volumen satélite 90° alrededor de la cara compartida con el volumen D (plano paralelo a ZX).
	Volumen satélite en su posición final (parte inferior de la cruz sobre el eje -Y).

Tabla 4. Transformaciones asociadas al volumen satélite (volumen E).

Al inicio de este artículo se menciona la necesidad de que los volúmenes durante su movimiento hacia el hiperplano seleccionado deberán mantener una relación de adyacencia de cara con otro volumen. Los volúmenes B, C, D, F, G y H son los seis que comparten una cara con el volumen central (el cual se mantiene estático durante todo el proceso). Para determinar

las transformaciones que se aplicarán al volumen satélite, es necesario determinar con qué volumen compartirá una cara. El volumen central ya se encuentra descartado, y de los restantes cualquiera puede ser seleccionado. En este artículo, el volumen D será seleccionado como aquel con el que el volumen satélite compartirá una cara durante el hiperplanamiento.

Para el volumen D ya se había determinado su plano de rotación y la dirección correspondientes (plano ZX, 90°) que lo llevarán a su posición final. El volumen satélite inicialmente tendrá también estos parámetros de movimiento. Esta es una forma de asegurar que ambos volúmenes compartan la cara correspondiente.

Cuando el volumen D ha finalizado sus movimientos y ha quedado en su posición final, el hiperplano de soporte del volumen satélite será perpendicular al hiperplano seleccionado y la cara compartida será paralela al plano ZX. El movimiento adicional que deberá aplicarse al volumen satélite será un giro de 90° alrededor del plano representado por la cara compartida.

La serie de movimientos a ejecutar sobre el volumen satélite se resumen en la tabla 4 (los volúmenes central y D se muestran también).

Ahora han sido determinadas las transformaciones con las que el hiper cubo será desenvuelto. Para envolverlo sólo habrá que aplicar el proceso presentado de manera inversa (considerando que la dirección de los ángulos sea contraria a la usada para desenvolver).

4. IMPLEMENTACIÓN

Rotaciones en el Espacio 4D

Banks [3] y Hollasch [8] han identificado que si en el espacio 2D una rotación es dada alrededor de un punto y en el espacio 3D es dada alrededor de una línea, entonces en el espacio 4D, de manera análoga, deberá darse alrededor de un plano.

Hollasch [8] considera que las rotaciones en el espacio 3D deben ser consideradas como rotaciones paralelas a un plano 2D en lugar de rotaciones alrededor de un eje. Hollasch [8] apoya esta idea considerando que dado un origen de rotación y un punto destino en el espacio 3D, el conjunto de todos los puntos rotados para una matriz de rotación dada coinciden en un solo plano, el cual es llamado el plano de rotación. Además, el eje de rotación en el espacio 3D coincide con el vector normal del plano de rotación. El concepto de plano de rotación es consistente con el espacio 2D debido a que todos los puntos rotados coinciden en el mismo y único plano. Finalmente, usando las ideas anteriores, Hollasch [8] construye las seis matrices de rotación 4D básicas alrededor de los planos principales en el espacio 4D (los planos XY, YZ, XZ, XW, YW y ZW) basado en el hecho de que sólo dos coordenadas cambian para una rotación dada (las coordenadas cambiantes corresponden al plano de rotación).

Usando estas ideas, Duffin [6] generaliza el concepto de rotación en un espacio nD ($n \geq 2$) como la rotación de un eje Xa en dirección hacia un eje Xb. El plano descrito por los ejes Xa y Xb es lo que Hollasch [8] definió como plano de rotación. Duffin [6] presenta la siguiente matriz general de rotación:

$$R_{ab}(\theta) = \begin{bmatrix} r_{ii} = 1 & i \neq a, i \neq b \\ r_{aa} = \cos \theta \\ r_{bb} = \cos \theta \\ r_{ab} = -\sin \theta \\ r_{ba} = \sin \theta \\ r_{ij} = 0 & \text{elsewhere} \end{bmatrix}$$

La matriz $R_{ab}(\theta)$ es una matriz identidad excepto en las intersecciones de las columnas a y b con los renglones a y b.

Debido a que en el espacio nD existen $C(n,2)$ planos principales, este número indica precisamente la cantidad de rotaciones principales (y básicas) para tal espacio.

A partir de estos conceptos, se debe considerar que una rotación puede ser referenciada usando dos notaciones: usando los ejes que describen el plano de rotación o usando los ejes que describen el subespacio (n-2)D que se encuentra fijo durante la rotación. En este documento las rotaciones en el espacio 4D han sido referenciadas usando la segunda notación.

Proyecciones 4D-3D-2D

Banks [3] establece que las mismas técnicas utilizadas para la proyección de objetos 3D sobre planos 2D pueden ser aplicadas para la proyección de polítopos 4D sobre hiperplanos 3D (nuestro espacio 3D por ejemplo). Entonces se tendrá que una proyección paralela 4D-3D (o bien, la eliminación de la coordenada W de los puntos del polítopo) está dada por:

$$P(x, y, z, w) \mapsto P'(x, y, z)$$

Una proyección perspectiva 4D-3D se define cuando el centro de proyección se encuentra sobre el eje W a una distancia pw del origen. Si el hiperplano de proyección es $W = 0$ entonces se tendrá que un punto P será proyectado como:

$$P(x, y, z, w) \mapsto P'\left(\frac{x \cdot pw}{pw - w}, \frac{y \cdot pw}{pw - w}, \frac{z \cdot pw}{pw - w}\right)$$

Debido a que una proyección 4D-3D producirá un volumen como la "sombra" de un polítopo 4D, Hollasch [8] considera válido procesar tal volumen con alguna de las proyecciones 3D-2D (paralela o perspectiva) para ser finalmente proyectado en una pantalla de computadora. De esta manera, se tendrán cuatro posibles proyecciones 4D-3D-2D:

- Proyección Perspectiva 4D-3D - Proyección Perspectiva 3D-2D.
- Proyección Perspectiva 4D-3D - Proyección Paralela 3D-2D.
- Proyección Paralela 4D-3D - Proyección Perspectiva 3D-2D.
- Proyección Paralela 4D-3D - Proyección Paralela 3D-2D.

Por ejemplo, el hipercubo presentado en la Figura 1 tiene aplicadas las proyecciones perspectiva 4D-3D y perspectiva 3D-2D.

5. RESULTADOS

En la Tabla 5 se presentan algunas fases de la secuencia del desenvolvimiento del hipercubo. En las imágenes 1 a 6 las rotaciones aplicadas son $\pm 0^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ$ y $\pm 75^\circ$ (el sentido de la rotación depende del volumen adyacente). En la imagen 7, la rotación aplicada es $\pm 82^\circ$; el volumen satélite se aprecia como un plano -un efecto producido por la proyección 4D-3D aquí seleccionada. En la imagen 8, la rotación aplicada es $\pm 90^\circ$; los volúmenes adyacentes finalizan sus movimientos. En las imágenes 9 a 14, el volumen satélite se mueve independientemente y las rotaciones aplicadas respectivamente son $+15^\circ, +30^\circ, +45^\circ, +60^\circ, +75^\circ$ y $+90^\circ$.

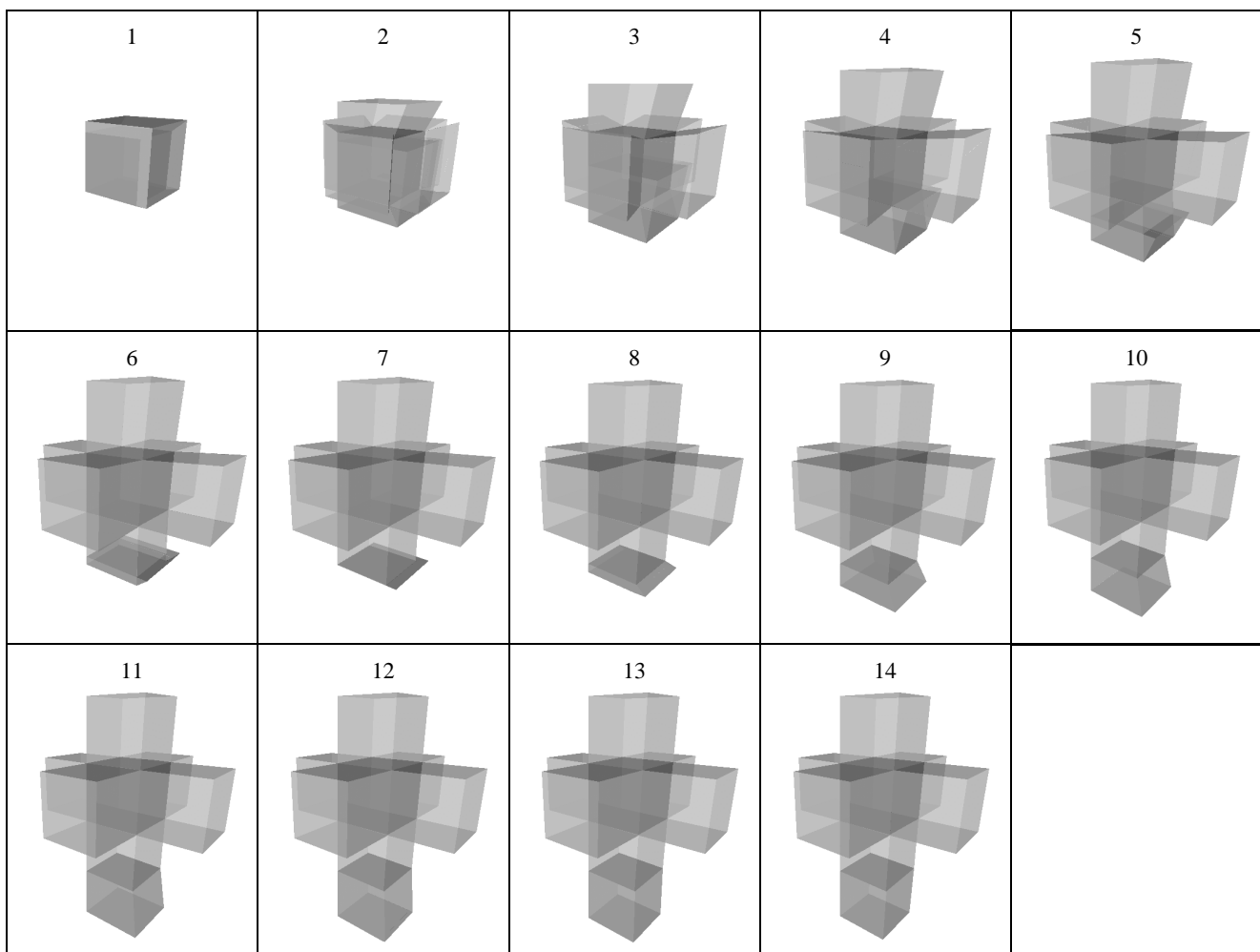


Tabla 5. Desenvolviendo al Hipercubo 4D (véase el texto para los detalles).

Actualmente, el resultado obtenido en esta investigación es usado eficazmente como material didáctico en la Universidad de las Américas - Puebla, México.

6. TRABAJO FUTURO

Observando los *unravelings* para un cuadrado (un cubo 2D), el cubo y el hiper-cubo 4D; podemos generalizar al **hiper-teseracto n -dimensional** ($n \geq 1$) como el resultado del desenvolvimiento de un hiper-cubo ($n+1$)-dimensional con las siguientes propiedades:

- El hiper-cubo ($n+1$)-dimensional tendrá $2(n+1)$ celdas n -dimensionales sobre su frontera.
- Una celda central permanecerá estática durante el proceso de desenvolvimiento / envolvimiento.
- $2(n+1)-2$ celdas serán adyacentes a la celda central. Todas las celdas compartirán una celda ($n-1$)-dimensional con la celda central.
- Una celda satélite no será adyacente a la celda central debido a que sus hiperplanos de soporte son paralelos. Ésta será adyacente a cualquiera de las celdas adyacentes (compartirá una celda ($n-1$)-dimensional con la celda adyacente seleccionada).
- Todas las celdas adyacentes y satélite rotarán durante el proceso de desenvolvimiento / envolvimiento rotarán $\pm 90^\circ$ alrededor del hiperplano de soporte de las celdas ($n-1$)-dimensionales compartidas.

Por ejemplo, el hiper-teseracto 4D es el resultado del desenvolvimiento de un hiper-cubo 5D. El hiper-teseracto 4D estará compuesto por 10 hiper-volúmenes, uno de ellos será el hiper-volumen central (estático), ocho serán adyacentes al hiper-volumen central (comparten un volumen) y el último será el hiper-volumen satélite (éste comparte un volumen con cualquiera de los volúmenes adyacentes). Véase la Figura 7. Los hiper-volumenes adyacentes y satélite rotarán alrededor de un volumen o un hiperplano durante el proceso de desenvolvimiento / envolvimiento.

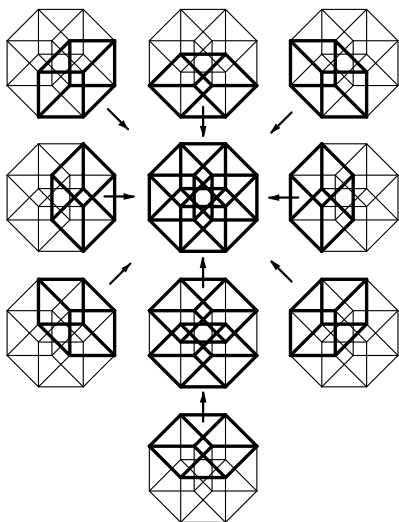


Figura 7. Las posibles relaciones de adyacencia entre el hiper-volumen central y los hiper-volúmenes adyacentes y satélite que formarán al hiper-teseracto 4D.

En este trabajo se ha propuesto un método para el desenvolvimiento del hiper-cubo 4D y obtención del tesseracto. También se ha propuesto una generalización para describir las propiedades del hiper-teseracto n -dimensional, el resultado del desenvolvimiento de un hiper-cubo ($n+1$)-dimensional. En el espacio 5D las rotaciones tienen lugar alrededor de un volumen, mientras que en el espacio 6D tienen lugar alrededor de un hiper-volumen y así sucesivamente. Esta es una de las direcciones a seguir en nuestra investigación a fin de obtener los parámetros necesarios para llevar a efecto el desenvolvimiento del hiper-cubo 5D. Además, otra dirección a seguir tiene relación con las rotaciones alrededor de planos arbitrarios en el espacio 4D (análogamente a las rotaciones alrededor de ejes arbitrarios en el espacio 3D). Al definir los procedimientos necesarios para la rotación alrededor de planos arbitrarios, la posición del hiper-cubo, en el espacio 4D, puede no ser relevante.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Abbott, E. A. Flatland: A Romance of Many Dimensions. New American Library, 1984.
- [2] Banchoff, Thomas F. Beyond the Third Dimension. Scientific American Library, 1996.
- [3] Banks, David. Interactive Manipulation and Display of Two-Dimensional Surfaces in Four-Dimensional Space. *Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics*, Orlando, FL USA, Pages 327 - 334, July 24 - 29, 1994.
- [4] Coxeter, H.S.M. Regular Polytopes. Dover Publications, Inc., New York, 1963.
- [5] Coxeter, H.S.M. Fundamentos de Geometría. Editorial Limusa, 1984.
- [6] Duffin, K, William, B. Spiders: A new user interface for rotation and visualization of n -dimensional points sets. *Proceedings of the 1994 IEEE Conference on Scientific Visualization*. 1994.
- [7] Hilbert, D. & Cohn-Vossen, S. Geometry and the Imagination. Chelsea Publishing Company, 1952.
- [8] Hollasch, Steven Richard. Four-Space Visualization of 4D Objects. Thesis for the Master of Science Degree. Arizona State University, 1991.
- [9] Kaku, Michio. Hyperspace: A Scientific Odyssey Through Parallel Universes, Time Warps, and the Tenth Dimension. Oxford University Press, 1994.
- [10] Robbin, Tony. Fourfield: Computers, Art & The 4th Dimension. Bulfinch Press, 1992.
- [11] Rucker, Rudolf V. B. Geometry, Relativity and the Fourth Dimension. Dover Publications, Inc., New York, 1977.
- [12] Rucker, Rudy. The Fourth Dimension. Houghton Mifflin Company, Boston, 1984.